# CAPITOLO V

## CALCOLO INTEGRALE

### 1. La definizione di integrale

Tra le varie funzioni che ha il calcolo integrale, quella che meglio si presta ad essere descritta riguarda le aree delle figure piane. Infatti, il calcolo integrale permette di dare una buona risposta al problema di definire (e calcolare) l'area di una classe la più ampia possibile di figure. Il calcolo integrale ha anche altre importanti applicazioni e motivazioni, sulle quali non mi soffermo (ricordo solo, dalla fisica, l'idea del lavoro compiuto da una forza).

Dunque occupiamoci di aree. Questo è un argomento che viene visto nella scuola secondaria nell'ambito della geometria euclidea. Spesso il livello di comprensione è sconsolatamente basso, in quanto questo approccio richiede preliminarmente la teoria delle grandezze (geometriche), che non è facile da digerire. Resta così un po' sospeso a mezz'aria, a metà strada tra l'approccio euristico-intuitivo della scuola media ed un approccio più rigoroso. Comunque, qualsiasi sia il livello di rigore cui si è giunti, di solito è noto come trovare l'area dei poligoni e del cerchio. E basta. Di figure non particolarmente difficili, come quella che è racchiusa da un'ellisse, non si sa cosa dire[1].

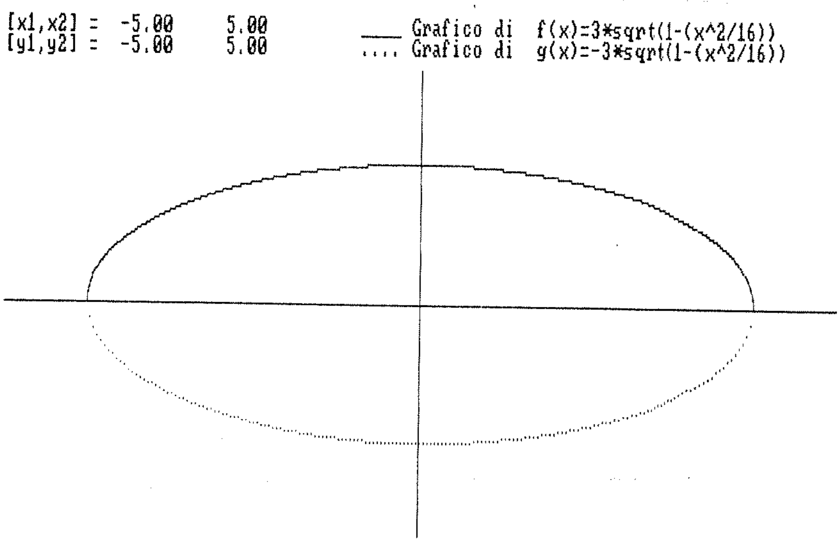
Come fare ad estendere (e ampiamente) la classe di figure cui si riesce ad assegnare un'area? Molto semplice: con la geometria analitica e il calcolo integrale. Osserviamo che, per esempio, una ellisse di semiassi $a$ e $b$ ha una equazione nel piano cartesiano[2] che è $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ . Se siamo interessati alla figura

---

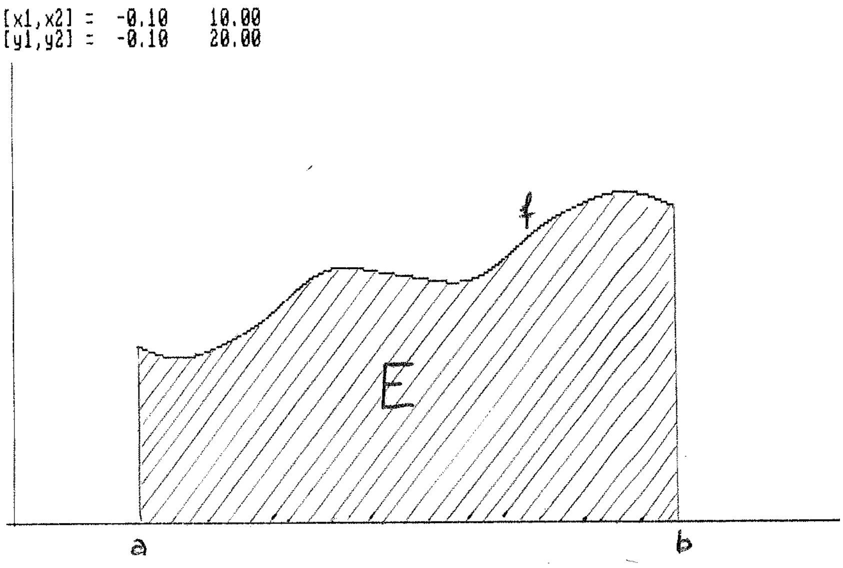
[1] Non certo da parte della geometria euclidea studiata nelle secondarie.

[2] Scelto convenientemente il sistema di riferimento!

"racchiusa" dentro, essa sarà descritta dalla relazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1$ : ovverossia, è la porzione di piano "compresa" tra il grafico di $g(x) = -b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ e $f(x) = b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ . Siamo quindi ricondotti al problema di definire l'area del sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ che è compreso tra i grafici di due funzioni. Anzi, considerazioni di simmetria ci inducono a ritenere che ci basti trovare l'area compresa tra la funzione positiva $f$ e l'asse delle $x$ : una volta trovata quest'area, basterà moltiplicare per due.




Il campo d'indagine è quindi ben recintato. Data $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ , con $f(x) \ge 0 \quad \forall \; x \in [a,b]$ , occorre riuscire a <u>definire</u> e, possibilmente, <u>calcolare</u> l'area di $E = \{ \; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \quad a \le x \le b \quad e \quad 0 \le f(x) \; \}$ . Ovvero, della figura tratteggiata alla pagina seguente, dove $E$ è rappresentato nel piano col solito tramite della geometria euclidea.

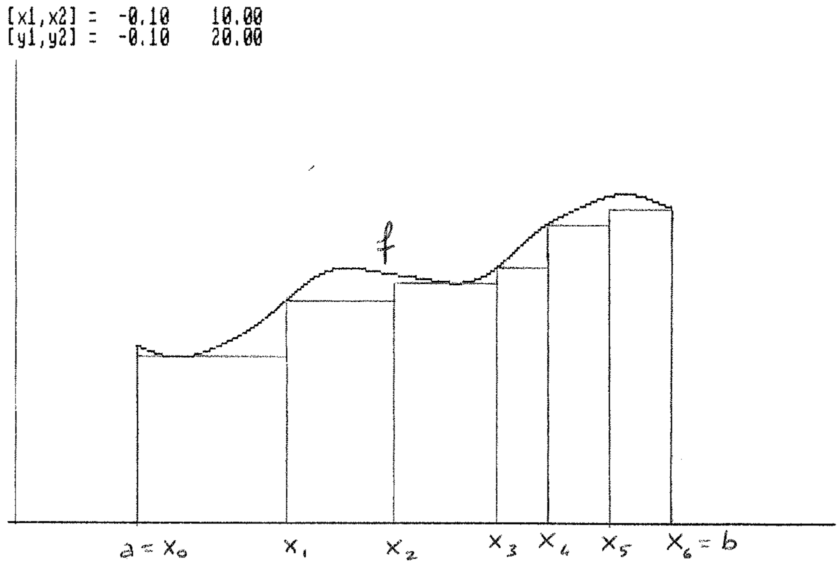



Come fare per definire l'area di $E$ ? Come già detto in altre occasioni, introducendo discorsivamente i concetti principali dell'analisi, non è affatto mia intenzione ripercorrere il cammino storico, né adottare un punto di vista pseudo ingenuo, andando a tentoni. C'è una idea buona, anche se non molto semplice da sfruttare: viene da lontano, trattandosi del metodo di esaustione di Archimede.

L'idea è veramente semplice: "approssimiamo $E$ per difetto e per eccesso" mediante delle figure elementari di cui sappiamo quant'è l'area. Dopodiché, raffinando sempre più l'approssimazione, con una qualche procedura di limite o suo parente stretto, potremo arrivare all'area di $E$ .

Quindi dobbiamo trovare figure semplici di cui conosciamo l'area; per di più, se vogliamo che approssimino per difetto l'area di $E$ , una scelta sensata è di prenderle contenute dentro $E$ (e contenenti $E$ per avere approssimazioni per eccesso). D'ora in avanti, mi concentrerò sulle approssimazioni per difetto: per quelle per eccesso, le considerazioni sono del tutto simili.

Osserviamo che l'insieme $E$ ha una struttura particolare, per cui una scelta abbastanza naturale è quella di usare come figure contenute dentro $E$ insiemi costituiti da più rettangoli accostati l'uno a fianco dell'altro, come indicato in figura.




Questi rettangoli hanno come base un sottointervallo di $[a,b]$ e una altezza tale da non superare il minimo valore di $f$ su tale sottointervallo (di modo che la figura ottenuta mettendo assieme questi rettangoli sia contenuta dentro $E$ ).

Volendo precisare le cose, potremmo procedere nel modo seguente. Fissiamo $n+1$ punti $x_o,x_1,\dots,x_n$ nell'intervallo $[a,b]$ t.c. $a = x_o < x_1 <\dots< x_n = b$ . Così otteniamo $n$ intervalli $[x_{i-1},x_i]$ , per $i = 1,\dots,n$ , che saranno le basi dei rettangoli in questione.

Per quanto riguarda le altezze, se vogliamo che il grafico di $f$ stia "sopra" al rettangolo, dovrà essere soddisfatta la condizione:

$$h_i \le \min \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \} ,$$

dove con $h_i$ indichiamo appunto l'altezza dell'i-esimo rettangolino. Ma allora tanto vale scegliere come $h_i$ proprio $\min \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \}$ .

Resta solo un "piccolo problemino". L'insieme $f([x_{i-1},x_i])$ , sarà in generale un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ con infiniti elementi. Chi ci garantisce che abbia minimo, di modo che la scelta che abbiamo fatto per $h_i$ sia sensata?

Si può rispondere a queste obiezioni seguendo due strade diverse.

La prima è abbastanza ovvia: per essere sicuri che il minimo ci sia, basterà assumere che $f$ sia continua su $[a,b]$ . Se così è, $f$ è anche continua sugli intervalli $[x_{i-1},x_i]$ e quindi ha certamente minimo grazie al teorema di Weierstrass.

La seconda è un po' meno ovvia, ma non particolarmente difficile. Se il lettore prova a riguardare quanto detto a pagina I.14, vi troverà scritto che il sup è una sorta di surrogato per il massimo, quando questo non c'è. E allora, visto che a noi interessa il minimo, potremmo pensare di prendere

$$h_i = \inf \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \} .$$

C'è questo inf ? Sì, grazie alla completezza di $\mathbb{R}$ , purché $\{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \}$ sia inferiormente limitato[3]. Sarà quindi sufficiente richiedere ad $f$ di essere inferiormente limitata su $[x_{i-1},x_i]$ per poter avere a disposizione gli $h_i$ (nel caso in esame non ci sono problemi, perché abbiamo addirittura supposto che fosse $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$ : quindi $f$ è certamente inferiormente limitata). Ma va bene la scelta dell'estremo inferiore? Ricordiamo che a noi serviva $h_i$ t.c. fosse $h_i \leq f(x) \ \forall x \in [x_{i-1},x_i]$ . Cioè a noi serviva un minorante per $f([x_{i-1},x_i])$ . E quindi la scelta fatta va benissimo, poiché l'estremo inferiore è proprio "il migliore dei minoranti possibili", essendo il massimo dei minoranti. Quindi, nessun problema: scegliendo $h_i = \inf \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \}$ , otteniamo che la figura complessivamente ottenuta è contenuta dentro $E$ , quindi ci fornisce una approssimazione per difetto.

Abbiamo quindi due strade percorribili, a priori. C'è quella, un po' più facile, di assumere che $f$ soddisfi la condizione di essere continua, e quella di richiedere ad $f$ solo di essere inferiormente limitata (ma in realtà servirà limitata, perché dovremo trovare anche le approssimazioni per eccesso).

Come il lettore smaliziato avrà ormai capito, scelgo la seconda.

Resta ancora da fare un importante passo.

Per ora ci siamo limitati a trovare una figura semplice (un "plurirettangolo") contenuta in $E$ e, per ovvia analogia, una figura semplice contenente $E$ [4] . Abbiamo pertanto ottenuto una approssimazione per difetto e una per eccesso per l'area di $E$ .

Come migliorarla?

L'idea è abbastanza scontata. Suddividiamo $[a,b]$ in un maggior numero di intervallini, più piccoli. E speriamo che in questo modo la approssimazione migliori. Potremmo per esempio pensare di dividere $[a,b]$ in $n$ parti uguali: otterremmo così due successioni di aree approssimanti l'area di $E$ , una per difetto

[3] Non vuoto lo è, perché immagine mediante $f$ di un insieme non vuoto.

[4] Basta prendere $k_i = \sup \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \}$ .

e l'altra per eccesso, che sperabilmente convergono entrambe all'area di $E$ . Oppure possiamo seguire la strada indicata da C-S. Cioè, considerare una coppia di classi separate. Mettiamo in $A$ <u>tutte</u> le <u>aree</u> dei plurirettangoli contenuti in $E$ e in $B$ le aree dei plurirettangoli contenenti $E$ , al variare di tutte le possibili partizioni di $[a,b]$ in sottointervalli.

E' sensato aspettarsi che:

- $(A,B)$ sia una coppia di classi separate
- l'area di $E$ sia l'elemento separatore per $(A,B)$ .

Potrebbe sembrare che, a questo punto, non si tratti altro che di mettere in bella copia questi discorsi euristici e dare le definizioni formali. Prima di passare ad esse, vorrei però prima sottolineare che nelle ultime affermazioni sono nascosti due problemi.

Il primo non è complicato da risolvere, però va notato che non è proprio scontato (pur se "evidente dal disegno") che le classi $A$ e $B$ siano effettivamente separate: con un pizzico di inventiva comunque riusciremo a provarlo.

Il secondo è invece un problema di carattere fondamentale.

Ho parlato dell'elemento separatore. Ma perché posso parlarne al singolare? L'assioma di completezza mi garantisce solo che esista un elemento separatore, non che sia unico.

Questo non è solo un problema tecnico. E' un problema <u>di fondo</u>. Il discorso che abbiamo fatto finora partiva infatti dall'ipotesi (data per scontata) che $E$ avesse un'area. Ora, questo può andare bene proprio per un discorso euristico come quello che abbiamo fatto. Però, il nostro problema non è solo quello di calcolare l'area di $E$ : c'è prima da sistemare la questione preliminare, e cioè sapere <u>se ha senso parlare di area per $E$</u> .

In altre parole, il problema è di vedere se si può estendere in qualche modo la definizione di area da figure "semplici" come poligoni e cerchi figure di carattere più generale come è l'insieme $E$ , cioè $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a \le x \le b$ e $0 \le f(x) \}$ .

Sarà quindi opportuna una pausa di riflessione. Abbiamo messo in piedi un sacco di cose e argomentazioni, ma c'è tutto il discorso da riorganizzare.

Ricomincio quindi daccapo, ripetendo in modo più compatto quanto detto finora, per meglio evidenziare la questione da risolvere.

E' data $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ , limitata (abbiamo visto perché ci fa comodo questa ipotesi) e t.c. $f(x) \geq 0 \quad \forall \ x \in [a,b]$ . Dato $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b$ e $0 \leq f(x) \}$ , suddividiamo $[a,b]$ in intervallini come già visto, ed osserviamo che il plurirettangolo costituito dai rettangoli aventi per base $[x_{i-1},x_i]$ e per altezza $\inf \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \}$ è contenuto dentro $E$ , così come quello avente come altezza $\sup \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \}$ , contiene $E$ .

Ma allora, se vogliamo dare una definizione <u>sensata</u> di area per $E$ , essa dovrà verificare la condizione

$$\sum_i (\inf \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \}) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq$$
$$\leq \text{area}(E) \leq$$
$$\leq \sum_i (\sup \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \}) \cdot (x_i - x_{i-1}) ,$$

per qualsiasi scelta della suddivisione di $[a,b]$ in sottointervalli. Ora, facendo riferimento alle classi $A$ e $B$ già menzionate in precedenza, osservo che si riesce a dimostrare che sono separate <u>anche senza alcun bisogno di fare riferimento all'area di $E$</u> (per fortuna, visto che l'area di $E$ la dobbiamo ancora definire!).

Quindi $A$ e $B$ sono due classi separate e quindi hanno elemento separatore, non necessariamente unico; se è unico, siamo a posto: definiremo l'area di $E$ proprio come quell'unico numero reale che funge da elemento di separazione. Se l'elemento separatore non è unico, ciò vuol dire che tra le approssimazioni per difetto e quelle per eccesso c'è un "gap": in tal caso, che cosa fare? Oltretutto gli esempi grafico-intuitivi non prefigurano situazioni di questo genere. Sfido chiunque a disegnare il grafico di una $f$ per il quale appaia evidente la presenza di questo "gap". E' allora inutile continuare con le chiacchiere: in caso di non unicità dell'elemento separatore, adotteremo una linea di condotta molto drastica, dicendo che $E$ <u>non ha area</u>. Cioè, non cercheremo di definire in alcun modo l'area di $E$ .

Finalmente le chiacchiere sono finite e possiamo deliziarci con un bel po' di definizioni, teoremi, etc.

Solo una considerazione ancora, un po' pignola, lo ammetto. Finora ho considerato funzioni $f$ definite su $[a,b]$ , l'intervallo che mi interessa. Può capitare benissimo, però, di avere una funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ , con $A$ s.i. qualsiasi di $\mathbb{R}$ , e di essere interessati a quel che succede su un intervallo $[a,b] \subseteq A$ . Per esempio, potrei prendere $f(x) = \sqrt{x}$ e voler sapere quale è l'area tra il grafico di $f$ , l'asse delle $x$ e la retta $x = 1$ : in altre parole, sono interessato ad $f$ su $[0,1]$ ; tuttavia, $f$ è definita su $A = [0,+\infty[$ , non solo su $[0,1]$ . Quindi, il punto di partenza più naturale è costituito da due dati: la funzione $f$ (con il suo insieme di definizione $A$ ) e l'intervallo $[a,b]$ sul quale concentro l'attenzione, con la ovvia condizione di compatibilità che $[a,b] \subseteq A$ . Se così stanno le cose, possiamo però considerare $f_{|[a,b]}$ ed applicare ad essa le considerazioni che faremo. Morale: quando d'ora in poi assumerò che $f$ sia definita su $[a,b]$ , deve rimanere inteso che, se la funzione che ci interessa è in realtà definita su un insieme che contiene $[a,b]$ , le considerazioni che faremo vanno intese come riferite a $f_{|[a,b]}$ .

D'ora in poi, abolirò la restrizione che sia $f \geq 0$ . Naturalmente, se $f$ non è più maggiore o uguale a zero, andrà perduta l'interpretazione dell'integrale come area. Come ho già detto, vi sono però altri motivi per introdurre l'integrale: in molti casi, una restrizione del genere sarebbe eccessiva.

Sia quindi data $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ , <u>limitata</u>. Considero una partizione $P = \{ x_o, x_1, \ldots, x_n \}$ di $[a,b]$ , con $a = x_o < x_1 < \ldots < x_n = b$ . Definiamo:

$$s(P,f) = \sum_i (\inf \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \}) \cdot (x_i - x_{i-1}) ,$$

$$S(P,f) = \sum_i (\sup \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \}) \cdot (x_i - x_{i-1}) .$$

E' evidente che $s(P,f) \leq S(P,f)$ , in quanto $\inf \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \} \leq \sup \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \}$ per ogni $i$ , e quindi

$$(\inf \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \}) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq$$
$$\leq (\sup \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \}) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

per ogni $i$ , da cui, sommando su $i$ , si ottiene

$$s(P,f) = \sum_i (\inf \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \}) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq$$
$$\leq \sum_i (\sup \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \}) \cdot (x_i - x_{i-1}) = S(P,f) .$$

In realtà, si può far meglio. E cioè si può dimostrare che, date due partizioni $P'$ e $P''$ di $[a,b]$ , si ha comunque $s(P',f) \leq S(P'',f)$ . Vediamo con un esempio come mai ciò sia vero. Consiglio di fare riferimento al disegno qua sotto nel leggere quel che segue.

$$
\begin{array}{lcccccc}
P'' & x''_o & x''_1 & x''_2 & x''_3 & & x''_4 \\
P' & x'_o & & x'_1 & & x'_2 & x'_3 \\
 & | & | & | & | & | & | \\
P & x_o & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5
\end{array}
$$

Supponiamo che sia $P' = \{ x'_o, x'_1, x'_2, x'_3 \}$ e $P'' = \{ x''_o, x''_1, x''_2, x''_3, x''_4 \}$ . Ovviamente è $x'_o = x''_o = a$ , $x'_3 = x''_4 = b$ . Supponiamo che sia poi, per esempio, $x'_1 = x''_2$ e che $x''_3 < x'_2$ . Mettendo assieme i punti di $P'$ e di $P''$ si ottiene $P' \cup P'' = \{ x'_o, x''_1, x'_1, x''_3, x'_2, x'_3 \}$ , dove ho elencato i punti in modo crescente. Chiamiamo allora $x_o = x'_o$ , $x_1 = x''_1$ , $x_2 = x'_1$ , $x_3 = x''_3$ , $x_4 = x'_2$ , $x_5 = x'_3$ : otteniamo così la partizione $P = \{ x_o, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \}$ . Credo che sia chiaro quale sia la buona idea che cerchiamo di sfruttare: basterà dimostrare che $s(P',f) \le s(P,f)$ e che $S(P,f) \le S(P'',f)$ . Dopo di che, tenendo conto che abbiamo già provato che $s(P,f) \le S(P,f)$ , otteniamo proprio $s(P',f) \le S(P'',f)$ . Mi limito a far vedere che $s(P',f) \le s(P,f)$ : l'altra relazione si ottiene specularmente.

Abbiamo:

$$
\begin{aligned}
& s(P',f) = \\
&= \sum_{i=1}^{3} (\inf \{ f(x) : x \in [x'_{i-1},x'_i] \}) \cdot (x'_i - x'_{i-1}) = \\
&= (\inf \{ f(x) : x \in [x'_0,x'_1] \}) \cdot (x'_1 - x'_0) + (\inf \{ f(x) : x \in [x'_1,x'_2] \}) \cdot (x'_2 - x'_1) + \\
&\qquad + (\inf \{ f(x) : x \in [x'_2,x'_3] \}) \cdot (x'_3 - x'_2) = \\
&= (\inf \{ f(x) : x \in [x'_0,x'_1] \}) \cdot [(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1)] + \\
&\qquad + (\inf \{ f(x) : x \in [x'_1,x'_2] \}) \cdot [(x_3 - x_2) + (x_4 - x_3)] + \\
&\qquad + (\inf \{ f(x) : x \in [x'_2,x'_3] \}) \cdot (x_5 - x_4) = \\
&= (\inf \{ f(x) : x \in [x'_0,x'_1] \}) \cdot (x_1 - x_0) + (\inf \{ f(x) : x \in [x'_0,x'_1] \}) \cdot (x_2 - x_1) + \\
&\qquad + (\inf \{ f(x) : x \in [x'_1,x'_2] \}) \cdot (x_3 - x_2) + \\
&\qquad + (\inf \{ f(x) : x \in [x'_1,x'_2] \}) \cdot (x_4 - x_3) + \\
&\qquad + (\inf \{ f(x) : x \in [x'_2,x'_3] \}) \cdot (x_5 - x_4) \le \\
&\le (\inf \{ f(x) : x \in [x_0,x_1] \}) \cdot (x_1 - x_0) + (\inf \{ f(x) : x \in [x_1,x_2] \}) \cdot (x_2 - x_1) + \\
&\qquad + (\inf \{ f(x) : x \in [x_2,x_3] \}) \cdot (x_3 - x_2) + \\
&\qquad + (\inf \{ f(x) : x \in [x_3,x_4] \}) \cdot (x_4 - x_3) + \\
&\qquad + (\inf \{ f(x) : x \in [x_4,x_5] \}) \cdot (x_5 - x_4) = \\
&= s(P,f) \ .
\end{aligned}
$$

Ovviamente il passaggio importante è quello relativo alla disuguaglianza, la quale è conseguenza del fatto che $\inf S \leq \inf T$ se $\emptyset \neq S \subseteq T$ .

Naturalmente quanto osservato in questo caso particolare si generalizza a due generiche partizioni P' e P" ; per la dimostrazione rinvio a C-S.

Avendo $s(P',f) \leq S(P'',f)$ per ogni scelta delle partizioni P' e P" , possiamo affermare che A e B sono due classi separate, dove:

$A = \{ s(P',f) : P'$ partizione di $[a,b] \}$

$B = \{ S(P'',f) : P''$ partizione di $[a,b] \}$ .

Infatti, se $a \in A$ , allora $\exists$ P' t.c. $a = s(P',f)$ ; se $b \in B$ , $\exists$ P" t.c. $b = S(P'',f)$ . Grazie a quanto abbiamo appena visto, possiamo affermare che $a \leq b$ , per cui le classi A e B sono effettivamente separate.

<u>Esercizio 1</u> Siano $f,g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ , dove X è un qualsiasi insieme. Mostrare con un controesempio che la seguente implicazione è falsa:

$( f(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in X ) \Rightarrow \Big( (f(X),g(X))$ è una coppia di classi separate$\Big)$ .

Provare invece che la seguente implicazione è vera:

$( f(x_1) \leq g(x_2) \quad \forall\, x_1,x_2 \in X ) \Rightarrow \Big( (f(X),g(X))$ è una coppia di classi separate$\Big)$ .□

E' facile provare che $\sup A$ e $\inf B$ sono elementi separatori per (A,B) . E' altrettanto ovvio dimostrare che l'elemento separatore è unico se e solo se $\sup A = \inf B$ .

Diremo quindi che f è integrabile se $\sup A = \inf B$ . Indicheremo con $\int_a^b f(x)\,dx$ questo unico elemento separatore e lo chiameremo integrale di f su $[a,b]$ . Nel caso in cui $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$ , assumeremo tale numero come valore dell'area di E ( $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b$ e $0 \leq f(x) \}$ ).

Abbiamo quindi finalmente la definizione di integrale; vediamo un esempio di come si possa utilizzare questa definizione.

<u>Esempio 1</u> Sia $f(x) = x$ e sia $[a,b] = [0,1]$ . Allora f è integrabile su $[0,1]$ e si ha $\int_0^1 f(x)\,dx = 1/2$ .□

<u>Dettaglio</u> Consideriamo le partizioni $P_n$ di $[0,1]$ ottenute dividendolo in n parti di uguale lunghezza. Cioè $P_n = \{ i/n : i \in \{0,1,\ldots,n\} \}$ . Osserviamo che sull'i-esimo intervallo, cioè su $[(i-1)/n, i/n]$ è

$$\inf \{ f(x) : x \in [(i-1)/n, i/n] \} =$$

$$\min \{ f(x) : x \in [(i-1)/n, i/n] \} = f((i-1)/n) = (i-1)/n$$

e si ha anche:

$$\sup \{ f(x) : x \in [(i-1)/n, i/n] \} = i/n \ .$$

Quindi

$$\begin{aligned} s(P_n,f) &= \\ &= \sum_{i=1}^{n} ((i-1)/n)\cdot(1/n) = \\ &= (1/n^2)\cdot\sum_{i=1}^{n} (i-1) = \\ &= (1/n^2)\cdot\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2} \ . \end{aligned}$$

Analogamente $S(P_n,f) = (1/n^2)\cdot\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n+1)n}{2}$ .

Poiché $\lim_{n\to\infty} s(P_n,f) = \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} S(P_n,f)$ , le due classi $A$ e $B$ hanno un unico elemento separatore ed esso è $1/2$ . Siano infatti $\lambda$ e $\mu$ due elementi separatori con $\lambda \le \mu$ . Si ha $s(P_n,f) \le \lambda$ e $S(P_n,f) \ge \mu$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$ (ricordo che un elemento separatore è un maggiorante per $A$ e un minorante per $B$ ). Pertanto, per il teorema di permanenza del segno:

$$1/2 = \lim_{n\to\infty} s(P_n,f) \le \lambda \le \mu \le \lim_{n\to\infty} S(P_n,f) = 1/2 \ ,$$

da cui otteniamo in un sol colpo l'unicità dell'elemento separatore e il fatto che esso valga $1/2$ .□

Come si vede, la definizione adottata ci dà dei risultati confortanti, conformi all'intuizione. Infatti per fortuna il risultato ottenuto è $1/2$ , cioè quel che già "si sapeva". Abbiamo quindi una definizione che ci ridà, per i poligoni, lo stesso valore dell'area che ci era già noto per altre vie[5]. Quindi la definizione di integrale, dal punto di vista del fornire una definizione per l'area delle figure piane, soddisfa una delle condizioni minimali che vanno rispettate ogni qual volta si cerca di estendere una definizione: la nuova definizione non è in contrasto con la vecchia per le figure di cui già ci era nota l'area.

[5] In realtà l'esempio si occupa di un particolare triangolo. Ma non ci vuole molto a considerare un generico poligono, effettuare una triangolazione e ripetere conti analoghi, per vedere che mediante gli integrali riotteniamo il valore dell'area che già conoscevamo.

D'altro canto, però, l'esempio fa anche emergere un problema: non sarà facile calcolare l'area di figure un po' complicate, visto il tipo di calcoli necessari già con una funzione semplice come $f(x) = x$ ! Per nostra fortuna, vedremo che c'è una strada completamente diversa per calcolare gli integrali: in molti casi si tratterà di fare conti molto semplici.

Mi occuperò dopo di questo problema. Per ora vorrei ancora discutere della definizione.

Dopo aver visto un esempio di funzione integrabile, è doveroso fornire almeno un esempio di funzione <u>non</u> integrabile.

<u>Esempio 2</u> Sia $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ così definita: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ .

Allora $f$ non è integrabile.□

<u>Dettaglio</u> Consideriamo una qualsiasi partizione $P$ di $[0,1]$ . Considero il generico intervallino $[x_{i-1},x_i]$ . Poiché $x_i < x_{i-1}$ , in tale intervallino "cadrà" un elemento $x' \in \mathbb{Q}$ ed anche un elemento $x'' \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ , grazie ai risultati sulla densità di razionali ed irrazionali in $\mathbb{R}$ [6]. Allora

$$\inf \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \} \leq f(x'') = 0$$

ed, analogamente:

$$\sup \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \} \geq f(x') = 1 .$$

Quindi $s(P,f) = \sum_{i=1}^{n} (\inf \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \}) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq 0$ , mentre $S(P,f) = \sum_{i=1}^{n} (\sup \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \}) \cdot (x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = 1$ .

Quindi abbiamo che, comunque si scelgano partizioni $P$ e $Q$ di $[0,1]$ , si ha $s(P,f) \leq 0$ e $1 \leq S(P,f)$ , pertanto sia $0$ che $1$ sono elementi separatori per le classi $A$ e $B$ . Quindi l'elemento separatore non è unico e pertanto $f$ non è integrabile.□

Che commento fare a questo esempio? Sembra riguardare una funzione un po' curiosa, inventata apposta per fare questo controesempio. Non è che io sono volutamente andato alla ricerca di una funzione strana per impressionare il lettore: come vedremo dopo, ogni funzione continua, anche "a pezzi", purché limitata, è integrabile. Per trovare un controesempio occorre quindi lavorare con funzioni molto irregolari. Benissimo! Questo significa che la definizione che abbiamo dato

[6] Vedi Corollario 9.5 a pagina 36 e Problemi 4 e 5 a pagina 37 di C-S.

ci permette di definire l'area per una classe molto vasta di figure piane. E, più in generale, visto che il problema dell'area non è l'unico cui cerca di dare risposta il calcolo integrale, abbiamo uno strumento con un ampio spettro di applicabilità.

Aggiungo ancora che, con la loro fervida fantasia, i matematici sono in realtà andati ben oltre. Sono riusciti a fare due cose non proprio ovvie. Sono riusciti ad estendere ancora la definizione di integrale: oltre a quella che abbiamo visto e che è legata al nome di Riemann, ce n'è un'altra, dovuta essenzialmente a Lebesgue, grazie alla quale risultano essere integrabili molte più funzioni (tra cui anche quella dell'esempio 2). Inoltre, i matematici sono stati in grado di provare addirittura che non è possibile dare una sensata definizione di area per le figure piane in modo da poter assegnare un'area a tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ . Tutto questo va ben al di là di quanto valga la pena di faticare in questo contesto, per cui mi limito solo a questi brevi cenni. Si noti, però, che non si tratta di fare delle speculazioni intellettuali gratuite: l'integrale nel senso di Lebesgue è uno strumento utilissimo per le <u>concrete</u> applicazioni della matematica.

Giunti alla fine del paragrafo, è opportuno ricapitolare un po' tutto il discorso. Data una funzione $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ , limitata, abbiamo detto che $f$ è integrabile (sottinteso: su $[a,b]$ ) se le classi $A$ e $B$ hanno un <u>unico</u> elemento separatore. Tale elemento lo interpreteremo come area di $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \;\; e \;\; 0 \leq f(x) \}$ , nel caso in cui $f$ sia maggiore o uguale di zero su tutto $[a,b]$ . In generale chiameremo tale elemento separatore integrale di $f$ su $[a,b]$ e lo indicheremo come $\int_a^b f(x)\,dx$ .

## 2. Una divagazione sulle notazioni

Approfitto dell'occasione offerta dalla notazione scelta per indicare l'integrale di $f$ su $[a,b]$ per alcune puntualizzazioni sull'uso delle notazioni, sia in generale che in questo contesto particolare.

La notazione scelta fa comparire una lettera, la $x$, la quale non c'entra nulla. Infatti, l'integrale dipende solo da $f$ e da $[a,b]$. Una notazione più sensata sarebbe, per esempio, $I(f,[a,b])$. In questa notazione sono coinvolte la $f$ e l'intervallo $[a,b]$, nonché la lettera $I$ la cui funzione è evidentemente solo mnemonica. Nessuno penso ritiene che la $I$ sia una variabile, in questo contesto. La notazione tradizionale, e cioè $\int_a^b f(x)dx$, assegna invece alla lettera $x$ un ruolo poco chiaro. Non solo, ma non si capisce affatto cosa possa voler dire quel "dx" : è un simbolo con un significato a sè stante, oppure la "d" davanti alla $x$ significa qualcosa di particolare, o che altro?

Trascurando per ora il problema di quella "d" messa davanti alla $x$, occupiamoci del ruolo di questa lettera $x$ che <u>non è una variabile</u>. Il caso del simbolo $\int_a^b f(x)dx$ non è l'unico in cui compare una variabile cosiddetta "muta". Altri casi già si sono presentati. Per esempio $\lim_{x\to x_o} f(x)$ o $\lim_{n\to\infty} a_n$ o ancora $\sum_{k=1}^n c_k$. In tutte queste notazioni compaiono delle lettere (rispettivamente $x,n,k$) che non sono delle variabili, cioè non possiamo sostituire a loro delle costanti. Non avrebbe nessun senso scrivere $\sum_{7=1}^n c_7$. Si usa allora dire che sono delle variabili "mute", perché non possono "parlare", ovverossia ad esse non possiamo sostituire dei valori particolari.

Perché si usano le variabili mute? Perché sono molto comode, rispetto a notazioni che non le usino. Ad esempio, per i limiti di funzioni si potrebbe usare la notazione $\lim(f,x_o)$ la quale fa intervenire, oltre al simbolo "lim" ad uso mnemonico, i simboli $f$ ed $x_o$ i quali sono delle vere variabili, nel senso che il valore del limite dipende ovviamente dalla specifica funzione considerata e dal punto nel quale lo si calcola: se ad $f$ sostituiamo la funzione "radice quadrata" e ad $x_o$ sostituiamo $36$, otteniamo un ben preciso valore per il limite. Avremmo cioè lim(radice quadrata,36) = 6 . Credo che già si intravveda la scarsa maneggevolezza di questa notazione che non usa le variabili mute. Peggio ancora sarebbe se volessimo scegliere come $f$ la funzione che in un generico punto $x$ assume il valore $\dfrac{x^5-x^3+6x}{x^2+3x-4}$ . Essa è la "funzione quoziente tra, al numeratore, la funzione ottenuta sommando la funzione 5ª potenza con sei volte la funzione identità e sottraendo la funzione cubo e, al denominatore, la funzione quadrato cui aggiungiamo il triplo della funzione identità e sottraiamo la funzione costante $4$ ". Una cosa mostruosa. Ma non è facile far meglio se si vuole indicare una funzione senza fare riferimento ai valori che essa assume in un "generico $x$ " .

Insomma, l'uso della lettera $x$ come variabile "muta" in una espressione come $\lim_{x \to x_0} f(x)$ sta nel fatto che molto frequentemente si ha a disposizione un modo succinto per indicare $f(x)$ mentre non si ha a disposizione un modo altrettanto conciso per indicare $f$ .

Fatte queste considerazioni di carattere generale, ritorniamo a concentrare la nostra attenzione sulla notazione $\int_a^b f(x)\,dx$ .

La notazione $\int_a^b f(x)\,dx$ è, semplicemente, un retaggio storico (un relitto del passato, se il lettore preferisce). Anche se uno non è interessato al perché "anticamente" si usasse questa notazione, costui comunque dovrebbe chiedersi come mai questo "fossile" sia sopravvissuto alla selezione naturale, la quale opera anche nell'ambito delle notazioni. Vedremo dopo, anche in successivi paragrafi, il perché di questa sopravvivenza.

## 3. Proprietà delle funzioni integrabili e dell'integrale

Come al solito, andiamo a vedere quanta compatibilità con la struttura dei numeri reali abbia il nuovo concetto.

Enuncio i risultati che mi interessano senza dimostrazione, Chi è interessato, può utilizzare il C-S (§ 77, non il § 70!).

Prima, una notazione per abbreviare: indicheremo con $\mathcal{R}([a,b])$ l'insieme delle $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitate e integrabili nel senso di Riemann su $[a,b]$ . Inoltre $f^+$ indicherà la funzione così definita: $f^+(x) = \max\ \{f(x),0\}$ E $f^-(x) = -\min\{f(x),0\}$ . Si noti che $f^+,f \geq 0$ e che $f = f^+-f^-$ .

Teorema 1 Siano $f,g \in \mathcal{R}([a,b])$ e $k \in \mathbb{R}$ . Siano inoltre $m$ e $M$ rispettivamente un minorante ed un maggiorante per $f$ su $[a,b]$ . Allora:

$$f+g \in \mathcal{R}([a,b]) \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$k\cdot f \in \mathcal{R}([a,b]) \quad \text{e} \quad \int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

Se $f \geq 0$ su $[a,b]$ , allora $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

$f^+,f^- \in \mathcal{R}([a,b])$

$$m\cdot(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\cdot(b-a) \quad \text{("teorema della media")}$$

Infine, se $c \in \,]a,b[$ , allora $f$ è integrabile su $[a,c]$ e su $[c,b]$ e si ha:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \text{("additività sul campo").}\square$$

Corollario 1 Siano $f,g \in \mathcal{R}([a,b])$ . Allora:

$$f-g \in \mathcal{R}([a,b]) \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x)-g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \ .$$

Se $f \leq g$ su $[a,b]$ , allora $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ .

Infine,

$$|f| \in \mathcal{R}([a,b]) \quad \text{e} \quad \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \ .\square$$

## 4. Interludio: funzioni uniformemente continue

Nel prossimo paragrafo proveremo che le funzioni continue sono integrabili sugli intervalli chiusi e limitati. Per arrivarci abbiamo però bisogno di introdurre una nuova condizione di "continuità", detta uniforme continuità.

Abbiamo quindi la seguente

Definizione 1 Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ , $A \subseteq \mathbb{R}$ . Diremo che $f$ è uniformemente continua su $B \subseteq A$ se:

$$\forall\ \varepsilon > 0\quad \exists\ \delta > 0\quad \text{t.c.}\quad \forall\ x_1, x_2 \in B\quad (\ |x_1 - x_2| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\ ) . \square$$

Visto il nome usato e la struttura della definizione, si impone immediatamente un confronto tra l'uniforme continuità di $f$ su $B$ e la continuità di $f$ su $B$ . Ricordiamo che $f$ è continua su $B$ se $f$ è continua in ogni $x_1 \in B$ , cioè se:

$$\underline{\forall}\ x_1' \in B\ ,\ \forall\ \varepsilon' > 0\quad \underline{\exists}\ \delta > 0\quad \text{t.c.}\quad \forall\ x_2' \in B$$
$$(\ |x_1' - x_2'| < \delta'\ \Rightarrow\ |f(x_1') - f(x_2')| < \varepsilon'\ ) .$$

Invece uniforme continuità vuol dire che:

$$\forall\ \varepsilon > 0\quad \underline{\exists}\ \delta > 0\quad \text{t.c.}\quad \underline{\forall}\ x_1 \in B\ ,\ \forall\ x_2 \in B$$
$$(\ |x_1 - x_2| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\ ) .$$

La differenza c'è, e balza agli occhi anche solo con un esame puramente formale della struttura delle due proposizioni. Infatti risultano invertiti i due quantificatori sottolineati[7]. Possiamo quindi tranquillamente affermare che l'uniforme continuità su $B$ implica la continuità su $B$ . Per il viceversa non possiamo dirlo con certezza, anche se probabilmente non sarà vero (in linea di massima, una proposizione del tipo "esiste... t.c. per ogni..." esprime una condizione più forte che non la proposizione "per ogni... esiste..." ). Per essere certi che "il viceversa non vale", il modo migliore è, al solito, quello di esi-bire un controesempio: grazie ad esso, possiamo dire che in generale la continuità non garantisce l'uniforme continuità.

Esempio 1 Sia $f(x) = x^2$ e sia $B = \mathbb{R}$ . Ovviamente $f$ è continua su $\mathbb{R}$ : proviamo che non è uniformemente continua. Cioè proviamo che si ha:

$$\exists\ \varepsilon > 0\quad \forall\ \delta > 0\quad \exists\ x_1, x_2 \in B\quad \text{t.c.}\quad (\ |x_1 - x_2| < \delta\quad \text{e}\quad |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon\ ) .$$

---

[7] C'è anche un'altra inversione, a dire il vero, ma questa riguarda due quantificatori entrambi universali e quindi è irrilevante.

Prendiamo $\varepsilon = 1$ . Dato $\delta > 0$ , scegliamo $x_1 = 1/\delta$ e $x_2 = (1/\delta)+(\delta/2)$ . E' $|x_1-x_2| < \delta$ , mentre $|x_1^2-x_2^2| = |x_1-x_2| \cdot |x_1+x_2| = (\delta/2)\cdot((2/\delta)+(\delta/2)) >$ $> (2/\delta)\cdot(\delta/2) = 1$ .□

Osservazione 1 Bene, l'esempio l'abbiamo visto. Ed è chiaro che il trucco è consistito nello sfruttare abilmente il famoso prodotto notevole $(x_1^2-x_2^2) =$ $= (x_1-x_2)\cdot(x_1+x_2)$ . Ma quali sono le idee che stanno dietro a tutto questo? Basta leggere la definizione. L'uniforme continuità ci dice che, dato $\varepsilon > 0$ , c'è un $\delta > 0$ t.c., se prendiamo due punti $x_1$ e $x_2$ che distino tra loro meno di $\delta$ , allora la distanza tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$ è minore di $\varepsilon$ . Si noti che sui punti $x_1$ e $x_2$ , l'unica condizione posta è che distino tra loro meno di $\delta$ (a parte quella, ovvia, che devono appartenere ad $A$ ): ciò significa che possiamo prendere, per così dire, la coppia $x_1,x_2$ dove vogliamo. Nel caso di $f(x) = x^2$ , basta dare un'occhiata al grafico per rendersi conto che, a pari distanza fra $x_1$ e $x_2$ , la distanza tra $f(x_1)$ ed $f(x_2)$ tende a diventare sempre maggiore, più prendiamo i punti $x_1$ e $x_2$ lontano da zero! Abbiamo sfruttato proprio questo.□

Osservazione 2 Mi auguro che qualcuno, leggendo la precedente osservazione, abbia pensato che forse c'è un legame tra l'uniforme continuità e la derivata di una funzione. Dopotutto, $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ può essere visto come un rapporto incrementale. Se sapessimo che questo rapporto incrementale è limitato, avremmo l'uniforme continuità. Infatti, se $\exists\ L > 0$ t.c. $\left|\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right| \le L$ , allora $|f(x_2)-f(x_1)| \le L\cdot|x_2-x_1|$ e quindi $f$ è uniformemente continua (effettivamente, dato $\varepsilon > 0$ , basta prendere $\delta = \varepsilon/L$ ...). Funzioni di questo tipo si chiamano funzioni lipschitziane. Grazie al teorema di Lagrange si ottiene facilmente una condizione sufficiente di lipschitzianità.□

Esercizio 1 Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ , $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $I \subseteq A$ , con $I$ intervallo. Se $f$ è derivabile su $I$ ed $\exists\ L > 0$ t.c. $|f'(x)| \le L\ \ \forall\ x \in I$ , provare che $f$ è lipschitziana su $I$ .□

Il risultato più importante di questo paragrafo è il seguente.

Teorema 1 (di Heine-Cantor) Sia $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ , continua su $[a,b]$ . Allora $f$ è uniformemente continua su $[a,b]$ .□

Dimostrazione Vedi C-S a pagina 172 (teorema 42.3).□

Mi limito a far notare che si tratta di un "grosso" teorema sulle funzioni continue (come il teorema di Weierstrass ed il teorema degli zeri). Guarda caso, anch'esso usa in modo essenziale la proprietà di completezza di $\mathbb{R}$ .

## 5. Integrabilità delle funzioni continue

Il risultato principale che proveremo è il seguente.

Teorema 1 Sia $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ , continua su $[a,b]$ . Allora $f$ è integrabile.□

Dimostrazione Basterà dimostrare che le classi $A$ e $B$ sono contigue, per ottenere che $f$ è integrabile. Cioè che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ a \in A$ ed $\exists\ b \in B$ t.c. $b-a < \varepsilon$ . Ovverossia, sarà sufficiente trovare una partizione $P$ t.c. $S(P,f)-s(P,f) < \varepsilon$ .

Come fare? E come si usa l'uniforme continuità per avere questo risultato? Consideriamo una partizione. Se su ogni intervallino della partizione si ha che

$$(\star) \qquad \sup \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \} - \inf \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \} \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

allora si ha

$$S(P,f)-s(P,f) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left( \sup \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \} - \inf \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \} \right) \cdot (x_i-x_{i-1}) \le$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (x_i-x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i-x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \varepsilon/2 < \varepsilon .$$

Come facciamo ad ottenere la disuguaglianza $(\star)$? Ovviamente sfruttando l'uniforme continuità. Grazie ad essa, sappiamo che $\exists\ \delta > 0$ t.c. se $|x_2-x_1| < \delta$ , allora $|f(x_2)-f(x_1)| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ .

Ma, allora, sarà sufficiente prendere una partizione $P = \{x_o,x_1,\dots,x_n\}$ con $|x_i-x_{i-1}| < \delta$ per ogni $i \in \{1,\dots,n\}$ .

Notiamo infatti che si ha proprio la disuguaglianza richiesta, e cioè la $(\star)$. Infatti, per il teorema di Weierstrass, esiste $\max \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \}$ e quindi $\exists\ \bar{\bar{x}} \in [x_{i-1},x_i]$ t.c. $f(\bar{\bar{x}}) = \sup \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \}$ . Analogamente $\exists\ \bar{x} \in [x_{i-1},x_i]$ t.c. $f(\bar{x}) = \inf \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \}$ . Ma allora

$$\sup \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \} - \inf \{ f(x) : x \in [x_{i-1},x_i] \} =$$
$$= f(\bar{\bar{x}})-f(\bar{x}) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

in quanto $|\bar{\bar{x}}-\bar{x}| \le |x_i-x_{i-1}| < \delta$ .□

Una conseguenza dell'integrabilità delle funzioni continue è una interessante estensione del teorema della media.

Teorema 2 Sia $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua. Allora $\exists\ \xi \in [a,b]$ t.c. $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a)$ .□

Dimostrazione Il teorema di Weierstrass garantisce che esistono $m = \min f([a,b])$ ed $M = \max f([a,b])$ . L'integrabilità di $f$ ci permette di applicare la versione già nota del teorema della media (teorema 3.1) e quindi ottenere che $m\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M\cdot(b-a)$ . Dividendo per $b-a$ , abbiamo:

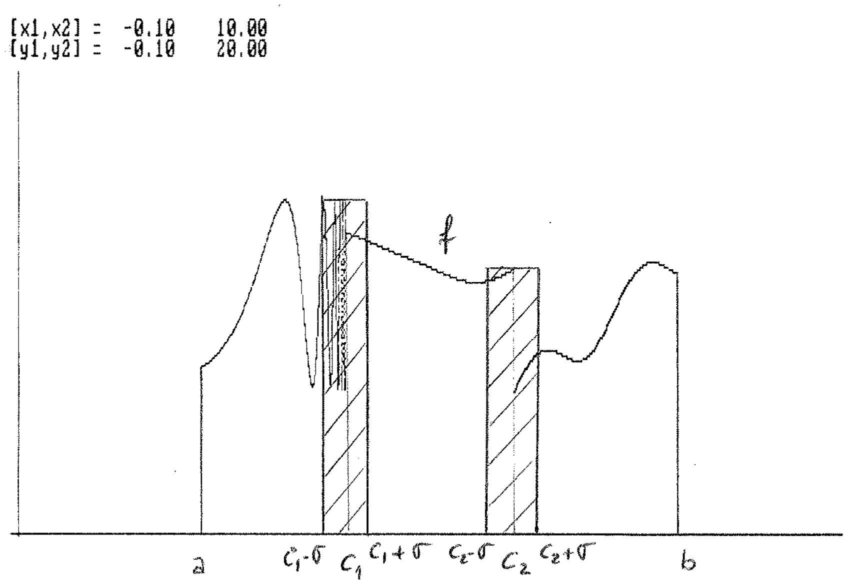
$$(\star) \qquad m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M .$$

Poiché $m,M$ sono valori assunti da $f$ , il teorema dei valori intermedi (teorema III.12.2) ci dice che $f$ assume anche il valore $\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ . Cioè , $\exists\ \xi \in [a,b]$ t.c. $f(\xi) = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ . Da qui la tesi.□

Si noti che il teorema 1 sull'integrabilità delle funzioni continue può ancora essere migliorato. In effetti, $f$ può anche avere "qualche discontinuità". Cioè, si può dimostrare il seguente:

Teorema 3 Sia $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ , limitata su $[a,b]$ e continua su $[a,b]\setminus F$ , dove $F$ è un s.i. finito di $[a,b]$ . Allora $f$ è integrabile.□

Dimostrazione La dimostrazione di questo teorema è un pochino complicata: vale però la pena di cercare di capirla, perché se ci si riesce si può ritenere di avere davvero capito che cosa sia un integrale. Sia $F = \{c_1,\dots,c_n\}$ . Possiamo naturalmente supporre che i punti di $F$ siano "messi in ordine", cioè che $c_1 < c_2 <\dots< c_n$ . Creiamo delle piccole "fasce di sicurezza" attorno a questi punti, di modo che la mancanza di continuità di $f$ in tali punti non infastidisca. Vedasi il disegno seguente.




Ovviamente su un intervallo del tipo $[c_i+\sigma, c_{i+1}-\sigma]$ [8], $f$ è certamente integrabile perché è continua. Restano quindi da "sistemare" gli intervalli $[c_i-\sigma, c_i+\sigma]$. Come trattiamo $f$ su $[c_i-\sigma, c_i+\sigma]$ ? Sfruttando la limitatezza di $f$ possiamo vedere agevolmente che lo scarto tra somme superiori ed inferiori è piccolo, purché $\sigma$ sia scelto "opportunamente piccolo".

Quelle sopra indicate sono le idee di fondo per dimostrare il teorema. Precisiamole meglio. Dato $\varepsilon > 0$ , dobbiamo trovare una partizione $P$ di $[a,b]$ t.c. $S(P,f)-s(P,f) < \varepsilon$ . Dividiamo $\varepsilon$ per $2$ : grazie alla citata continuità di $f$ sugli intervalli del tipo $[c_i+\sigma, c_{i+1}-\sigma]$ (ai quali si vanno ad aggiungere eventualmente $[a, c_1-\sigma]$ (se $a < c_1$ ) e $[c_n+\sigma, b]$ (se $c_n < b$ )), sarà possibile piazzare un numero sufficiente di punti in tali intervalli in modo che complessivamente lo scarto tra somme inferiori e superiori sia minore di $\varepsilon/2$ . Ci avanza ancora un $\varepsilon/2$ : poiché $f$ è limitata, se prendiamo $\sigma$ sufficientemente piccolo abbiamo che $(n\cdot(\sup f([a,b]) - \inf f([a,b])))\cdot 2\sigma < \varepsilon/2$ (abbiamo $n$ intervallini di ampiezza $2\sigma$ e su ognuno di loro lo scarto massimo che possono avere i valori di $f$ è proprio $\sup f([a,b]) - \inf f([a,b])$ ) e quindi con ciò "si-

[8] Preciserò alla fine come va scelto $\sigma$ : per ora basti pensare che $\sigma$ è "abbastanza piccolo".

stemiamo" anche gli intervallini del tipo $[c_i-\sigma,c_i+\sigma]$ .

Tutto bene? Ovverossia, non si tratta altro che della tecnica ormai ben nota di "distribuire" la "tolleranza" $\varepsilon$ tra tutti i fattori di possibile disturbo? Essenzialmente è così, però non possiamo far finta di non vedere un problema che è presente. Non è indifferente l'ordine col quale "sistemiamo" gli intervallini $[c_i+\sigma,c_{i+1}-\sigma]$ e $[c_i-\sigma,c_i+\sigma]$ . Per evitare grane, dobbiamo prima "sistemare" gli intervallini $[c_i-\sigma,c_i+\sigma]$ (ovvero: determinare quanto "piccolo" debba essere $\sigma$ ) e poi, dopo, ci possiamo occupare degli intervallini del tipo $[c_i+\sigma,c_{i+1}-\sigma]$ .

Non c'è altro. Ora, non ci resta altro che formalizzare (cioè precisare per bene) i discorsi fatti sin qui.

Sia $K\in\mathbb{R}$ t.c. $|f(x)|\le K$ $\forall\, x\in[a,b]$ . Allora abbiamo $\sup\{\, f(x) : x\in[a,b] \,\} - \inf\{\, f(x) : x\in[a,b] \,\} \le 2K$ . Sia quindi $\sigma$ t.c. $\sigma<\varepsilon/4K$ . Per esempio, possiamo prendere $\sigma=\varepsilon/8K$ . Tolti gli intervalli $]c_i-\sigma,c_i+\sigma[$ , $[a,b]$ resta suddiviso in $n+1$ intervalli su ognuno dei quali $f$ è continua[9] .Grazie alla continuità di $f$ su questi intervallini, potremo trovare una partizione su ognuno di loro in modo che lo scarto tra somme superiori ed inferiori sia minore di $\dfrac{\varepsilon}{2(n+1)}$ . Raccattando assieme tutti i punti che individuano ognuna di queste partizioni degli intervallini, otteniamo una partizione $P$ di $[a,b]$ . A questo punto, è scontato, per come l'abbiamo costruita, che $S(P,f)-s(P,f)<\varepsilon$ : lascio volentieri al lettore il compito di fare quest'ultimo passo.□

Esercizio 1 Sia $\bar{f}:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ , continua. Sia $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una funzione ottenuta modificando $\bar{f}$ in un numero finito di punti. Provare che $f$ soddisfa le ipotesi del teorema 3. Fare un esempio di $f$ che soddisfa le ipotesi di tale teorema, ma che non si può ottenere a partire da una $\bar{f}$ continua modificandola in un numero finito di punti.□

Osservazione 1 Il teorema 2 (della media) non può essere generalizzato alle funzioni con punti di discontinuità (ancorché in numero finito). Esempio:

---

[9] Per la precisione (e non si fa matematica se non si è precisi!), quanto è stato appena detto è giusto solo nel caso in cui i punti $c_i$ siano tutti interni ad $[a,b]$ . Se così non è, vanno fatte alcune lievi modifiche. Vediamo quali, nel caso in cui sia, per esempio, $c_1=a$ . Bisognerà considerare l'intervallo $[a,a+\sigma]$ , visto che $[a-\sigma,a+\sigma]$ "deborda" dall'intervallo $[a,b]$ . E allora $[a,b]$ resta suddiviso in $n$ intervallini, anziché $n+1$ , se $c_n<b$ ; addirittura in $n-1$ se $c_n=b$ .

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in [0,1] \setminus \{1/2\} \\ 0 & \text{se} \quad x = 1/2 \end{cases} \quad . \square$$

## 6. Integrali orientati

Fino ad ora abbiamo visto la definizione di integrale di una funzione su un insieme (si trattava di insiemi particolari, cioè intervalli).

Possiamo facilmente estendere questa definizione in modo da considerare, per così dire, l'integrazione su insiemi "orientati". In effetti, la notazione stessa di integrale è già concepita per rendere facile questa estensione. Una notazione più precisa di $\int_a^b f(x)dx$ sarebbe stata $\int_{[a,b]} f(x)dx$ : questa notazione avrebbe messo in evidenza che stiamo integrando sull'insieme $[a,b]$ (più in generale, si potrebbe scrivere $\int_A f(x)dx$ se l'insieme sul quale si integra $f$ è $A$ : questo, d'altronde, è proprio quel che si fa nel caso delle funzioni di più variabili, cioè per i cosiddetti integrali multipli). Invece, la notazione scelta ci permette di introdurre subito la seguente definizione.

Definizione 1 (di integrale definito orientato) Sia $f:A \longrightarrow \mathbb{R}$ , $A \subseteq \mathbb{R}$ e siano $x_1, x_2 \in A$ . Definiamo

$$\uparrow\!\!\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx =$$

$$= \begin{cases} \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx & \text{se } x_1 < x_2 \,,\ [x_1,x_2] \subseteq A \text{ e } f \text{ è integrabile su } [x_1,x_2] \\ 0 & \text{se } x_1 = x_2 \\ -\int_{x_2}^{x_1} f(x)dx & \text{se } x_1 > x_2 \,,\ [x_2,x_1] \subseteq A \text{ e } f \text{ è integrabile su } [x_2,x_1] \end{cases} . \square$$

Osservazione 1 Abbandoneremo subito la notazione $\uparrow\!\!\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ per la notazione solita $\int_a^b f(x)dx$ . Le ragioni per fare così sono ovvie: se abbiamo $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ , (e quindi con $a < b$ !), e prendiamo $x_1 = a$ e $x_2 = b$ , otteniamo, dalla definizione testé data, che $\uparrow\!\!\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ . Ovverossia, la nuova definizione ci ridà il nostro buon vecchio integrale quando integriamo su $[a,b]$ , con $a < b$ . Quindi la definizione 1 estende la definizione di integrale, senza creare "conflitti di competenza" nei casi di pertinenza di entrambe le definizioni. Per questa ragione non c'è obbligo di introdurre una nuova notazione, non essendoci rischi di confusione.□

<u>Osservazione 2</u> Leggeremo il simbolo $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ "integrale orientato di $f$ fra $x_1$ e $x_2$", ovverossia "integrale di $f$ da $x_1$ a $x_2$".□

## 7. Teorema fondamentale del calcolo integrale

Ci occuperemo in questo paragrafo di un risultato che ha avuto una assoluta rilevanza nel determinare il successo del calcolo integro-differenziale.

Prima di poter enunciare questo risultato abbiamo bisogno di introdurre una definizione: quella di funzione integrale.

L'idea di funzione integrale è molto semplice: avendo $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, fissato $x_o \in A$, posso considerare l'integrale definito orientato da $x_o$ a $x_1$, per ogni $x_1 \in A$ per il quale ciò abbia senso (vedasi la definizione 6.1[10]). Sia $B$ l'insieme degli $x_1$ per i quali le condizioni poste dalla definizione 6.1 sono soddisfatte: abbiamo che <u>ad ogni</u> $x_1 \in B$ possiamo associare il <u>numero reale</u> $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$. Ma allora vuol dire che abbiamo definito su $B$ una funzione reale di variabile reale! Infatti, come appena detto, ad ogni $x_1 \in B$ abbiamo associato uno ed un solo numero reale. Quindi, sempre assumendo che $x_o$ sia fissato, abbiamo la funzione $x_1 \longmapsto \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$, definita su $B$, che per ovvie ragioni, si chiama funzione integrale di $f$ (se necessario, si specificherà che è la funzione integrale di $f$ essendo fissato $x_o$).

Prima di passare ai teoremi centrali di questo paragrafo, vorrei insistere sul problema della corretta individuazione di $B$, poiché l'esperienza insegna che troppo spesso lo studente è distratto su questo punto e non presta la dovuta attenzione ai problemi che ci sono e che ho già cercato di sottolineare nella precedente nota a pié pagina.

<u>Osservazione 1</u> Sia $A = ]-\infty,0[ \cup [1,+\infty[$ e sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che $f$ sia continua su $A$. Sia $x_o = -1 \in A$. Allora la funzione integrale è definita per $x_1 \in ]-\infty,0[$ (infatti la continuità di $f$ garantisce l'integrabilità di $f$ da $x_o$ a $x_1$), ma <u>non</u> <u>è</u> <u>definita</u> per $x_1 \in [1,+\infty[$. Infatti <u>non</u> posso considerare $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$ se $x_1 \in [1,+\infty[$, poiché $f$ <u>non</u> è definita su <u>tutto</u> l'inter-

---

[10] E' assolutamente fondamentale capire quali restrizioni pone la definizione 6.1! Supponiamo, per fissare le idee, che sia $x_1 < x_o$. Sarà necessario che sia $[x_1,x_o] \subseteq A$ (<u>non</u> <u>basta</u> che $x_o,x_1 \in A$ !!) e che $f$ sia integrabile su $[x_1,x_o]$.

vallo $[x_o,x_1]$ . Tanto per fare un esempio, se $x_1 = 3$ ,<u>non</u> posso fare $\int_{-1}^{3} f(x)dx$ perché $f$ non è definita su tutto $[-1,3]$ .□

<u>Osservazione</u> <u>2</u> Abbiamo ottenuto la funzione integrale come funzione che ad $x_1$ associa $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$ . Quindi essa si presenta, con la scelta che abbiamo fatto per indicare la variabile "indipendente", come una funzione della variabile $x_1$ . Poiché siamo abituati ad usare il simbolo $x_1$ per indicare costanti o dati, sarebbe comodo poter usare "la solita $x$ " come variabile. E' chiaro che si creano, però, dei guai. <u>Non</u> <u>possiamo</u> sostituire direttamente alla variabile $x_1$ la variabile $x$ , in quanto la lettera $x$ è già da noi usata come pseudo-variabile (variabile muta) nella notazione adottata per l'integrale. Dobbiamo procedere così. <u>Prima</u> facciamo quel che si usa chiamare "cambio alfabetico": usiamo un'altra lettera dell'alfabeto ( $t$ ad esempio) al posto della lettera $x$ come variabile muta. Cioè scriviamo $\int_{x_0}^{x_1} f(t)dt$ anziché $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$ . <u>Ora</u> possiamo effettuare la sostituzione, e cioè usare la variabile $x$ (o ogni altra che ci faccia comodo, tranne $t$ ) al posto di $x_1$ e scrivere $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ anziché $\int_{x_0}^{x_1} f(t)dt$ , ottenendo così una funzione della variabile $x$ anziché della variabile $x_1$ , conformemente alla tradizione. E $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ sarà la notazione che adotterò d'ora in poi.□

Siamo arrivati al "dunque". Per evitare di appesantire il discorso con difficoltà accessorie, non mi porrò nelle condizioni "più generali possibili". Assumerò di avere $f$ definita e <u>continua</u> su un <u>intervallo</u> $I$ . L'interesse delle condizioni sottolineate sta nel fatto che allora la funzione integrale risulta essere essa stessa definita su tutto l'intervallo $I$ , qualunque sia il "punto di partenza" $x_o \in I$ scelto. Infatti, poiché $I$ è un intervallo, qualunque sia $x \in I$ ho che $[x_o,x] \subseteq I$ (o $[x,x_o] \subseteq I$ , qualora $x < x_o$ ); non solo, la continuità di $f$ su $[x_o,x]$ (ovvero $[x,x_o]$ , quando $x < x_o$ ) mi garantisce che esiste l'integrale da $x_o$ ad $x$ .

Fatte queste premesse, abbiamo:

<u>Teorema</u> <u>1</u> (teorema fondamentale del calcolo integrale) Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ , $I$ intervallo, $f$ continua su $I$ . Sia $x_o \in I$ fissato. Allora la funzione inte-

grale è derivabile su tutto $I$ e la sua derivata è $f$ .□

<u>Dimostrazione</u> Basta scrivere la definizione di derivata e usare il teorema della media. Ma vediamo i dettagli, trattandosi di un teorema fondamentale. Tanto per cominciare, la funzione integrale è definita su tutto $I$ , come già notato prima dell'enunciato del teorema.

Sia $\bar{x} \in I$ . Devo provare che la funzione integrale è derivabile in $\bar{x}$ . Per comodità indicherò con $F$ la funzione integrale, cioè $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ . Allora dobbiamo provare che $\exists \lim\limits_{x \to \bar{x}} \dfrac{F(x)-F(\bar{x})}{x-\bar{x}} \in \mathbb{R}$ , ovverossia che

$$\exists \lim_{x \to \bar{x}} \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)dt}{x-\bar{x}} \in \mathbb{R} .$$

Ma abbiamo $\dfrac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)dt}{x-\bar{x}} = \dfrac{\int_{\bar{x}}^{x} f(t)dt}{x-\bar{x}}$ per il teorema di additività sul campo.

Il teorema della media assicura che $\exists\ \xi \in [\bar{x},x]$ [11] t.c. $\dfrac{\int_{\bar{x}}^{x} f(t)dt}{x-\bar{x}} = f(\xi)$ .

Osserviamo che avere $\xi \in [\bar{x},x]$ (o anche $\xi \in [x,\bar{x}]$ ) è equivalente ad avere $\theta \in [0,1]$ t.c. $\xi = \bar{x}+\theta\cdot(x-\bar{x})$ .

Infatti, per $\bar{x} < x$ si ha:

$\bar{x} \le \bar{x}+\theta\cdot(x-\bar{x}) \le x \iff 0 \le \theta\cdot(x-\bar{x}) \le x-\bar{x} \iff \theta \in [0,1]$

e per $x < \bar{x}$ si ha:

$x \le \bar{x}+\theta\cdot(x-\bar{x}) \le \bar{x} \iff x-\bar{x} \le \theta\cdot(x-\bar{x}) \le 0 \iff \theta \in [0,1]$ .

Il vantaggio di sostituire $\xi$ con $\bar{x}+\theta\cdot(x-\bar{x})$ non consiste solo nel fatto che questa seconda espressione non ci obbliga a fare ogni volta la distinzione dei casi tra $\bar{x} < x$ e $x < \bar{x}$ . Per sfruttare appieno le potenzialità offerte da $\theta$ , dobbiamo ancora fare un passo.

Ricordo che siamo arrivati ad ottenere che $\forall\ x \in I$ , $\exists\ \theta \in [0,1]$ t.c.

---

[11] Oppure $\xi \in [x,\bar{x}]$ ...

$$(\star) \quad \frac{F(x)-F(\bar{x})}{x-\bar{x}} = f(\bar{x}+\theta\cdot(x-\bar{x})) \ .$$

Naturalmente, dato $x \in I$, di $\theta$ che "vanno bene" ce ne possono essere tanti. Bene, noi ne sceglieremo uno. Cioè, per ogni $x \in I$, sceglieremo uno ed un solo $\theta \in [0,1]$ tale da soddisfare la $(\star)$. Ma così facendo abbiamo individuato una funzione $x \longmapsto \theta(x)$, definita su $I$ e a valori in $\mathbb{R}$, ma ovviamente limitata, assumendo di fatto valori in $[0,1]$.

Abbiamo quindi che $\forall \ x \in I \quad \dfrac{F(x)-F(\bar{x})}{x-\bar{x}} = f(\bar{x}+\theta(x)\cdot(x-\bar{x}))$, essendo $\theta(x) \in [0,1]$.

Ricordiamo che dobbiamo fare il limite del rapporto incrementale. Naturalmente faremo il limite usando l'espressione che abbiamo ottenuto a destra. Bene: se $x \longrightarrow \bar{x}$, abbiamo che $\lim\limits_{x\to\bar{x}} (x-\bar{x}) = 0$ e che $\theta(x)$ è limitata, pertanto $\lim\limits_{x\to\bar{x}} \theta(x)\cdot(x-\bar{x}) = 0$ ; quindi $\lim\limits_{x\to\bar{x}} \bar{x}+\theta(x)\cdot(x-\bar{x}) = \bar{x}$. Ovverossia, la funzione $g(x) = \bar{x}+\theta(x)\cdot(x-\bar{x})$ è continua in $\bar{x}$. Ma $f$ è continua per ipotesi, e quindi il teorema sulla continuità delle funzioni composte ci dice che $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f(\bar{x}+\theta(x)\cdot(x-\bar{x})) = f(\lim\limits_{x\to\bar{x}} (\bar{x}+\theta(x)\cdot(x-\bar{x}))) = f(\bar{x})$.

Abbiamo quindi ottenuto quanto affermato nell'enunciato del teorema, e cioè che la funzione integrale è derivabile in ogni $\bar{x} \in I$ e che $F'(\bar{x}) = f(\bar{x})$, cioè che la derivata di $F$ è proprio $f$. $\square$

## 8. Primitive

Sia chiaro che questo paragrafo non dovrebbe trovarsi qui, perché tratta un argomento di calcolo differenziale, non integrale. Tuttavia, la forza della tradizione e delle notazioni tradizionali, nonché la stretta connessione che vi è tra quel che diremo e il teorema fondamentale del calcolo integrale, suggeriscono questa curiosa collocazione.

Sia dunque data $f:A \longrightarrow \mathbb{R}$ , $A \subseteq \mathbb{R}$ . Un problema abbastanza naturale che ci si può porre è il seguente: esiste una funzione $\Phi:A \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\forall\ x \in A$ $\Phi'(x) = f(x)$ ? O, più in generale, $\exists\ \Phi:B \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\Phi'(x) = f(x)$ $\forall\ x \in B$ , essendo $B \subseteq A$ ? Da questa domanda scaturisce una definizione.

Definizione 1 Sia $f:A \longrightarrow \mathbb{R}$ , $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $B \subseteq A$ . Una funzione $\Phi:B \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\Phi'(x) = f(x)$ $\forall\ x \in B$ , si dice primitiva di $f$ in $B$ (o su $B$ ). Se $B = A$ , diremo più semplicemente che $\Phi$ è una primitiva di $f$ .□

E' evidente che vi è una interpretazione cinematica di tutto ciò: se il cronotachigrafo mi dà istante per istante la velocità di un camion, posso grazie a questo risalire alla posizione istante per istante del camion? Molti altri esempi si potrebbero fare, ma preferisco sottolineare che dalla definizione data sorgono molti problemi e molte domande.

Data $f$ , essa ha primitive? O, magari, sotto quali condizioni su $f$ ne ha? ( $f$ deve essere limitata? continua? derivabile? altro?). Se ne ha, quante ne ha? Sappiamo "calcolare" queste primitive? Abbiamo cioè una "formula" che ce le fornisce o in quale modo dobbiamo procedere?

Boh. Però, con un piccolo "lampo di genio" potremmo pensare di leggere una tabella contenente le derivate delle funzioni "elementari" da destra a sinistra. Et voilà, una tabella di primitive! Per esempio, una primitiva di $1$ è $x$ , di $2x$ è $x^2$ , di $e^x$ è $e^x$ , di $1/x$ è $\log(x)$ (almeno per $x > 0$ ), di $\cos(x)$ è $\mathrm{sen}(x)$ , di $-\mathrm{sen}(x)$ è $\cos(x)$ ...

Sembrerebbe quasi fin troppo facile! Certo, vi sono un po' di stranezze. Per esempio, a noi magari interessa una primitiva di $\mathrm{sen}(x)$ , non di $-\mathrm{sen}(x)$ . Però è ovvio (dalle regole di derivazione) che, se $(\cos(x))' = -\mathrm{sen}(x)$ , allora $(-\cos(x))' = \mathrm{sen}(x)$ . Vi sono però problemi un po' più difficili da risolvere. Per esempio: in una tabella di derivate, "a destra" non compare $\log(x)$ o $\mathrm{arctg}(x)$ . Per cui, se vogliamo trovarne le primitive, dobbiamo farci venire qualche altra buona idea.

Anzi, meglio ancora: sarà opportuno costruire un pezzo di solida teoria.

Cominciamo col risolvere i problemi "fondamentali" relativi alle primitive: esistenza e unicità.

Per quanto riguarda l'esistenza di primitive, abbiamo a disposizione un comodo risultato (anche se a prima vista sembra essere poco interessante a fini pratici oltre che a quelli teorici).

<u>Teorema 1</u> Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ , $A \subseteq \mathbb{R}$ ; sia $I$ intervallo t.c. $I \subseteq A$ . Se $f$ è continua su $I$ , allora $f$ ha primitive su $I$ .□

<u>Dimostrazione</u> Banale, grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale: fissiamo $x_0 \in I$ a nostro piacimento e possiamo affermare che $\Phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ , certamente definita $\forall\ x \in I$ , è t.c. $\Phi'(x) = f(x)$ $\forall\ x \in I$ .□

Interessante, certamente, teoricamente. Ma praticamente? Se voglio trovare una primitiva di $\log(x)$ ,devo calcolare <u>per</u> <u>ogni</u> $x > 0$ il valore di $\int_{1}^{x} \log(t)\,dt$ (avendo scelto $x_0 = 1$ , per esempio). In linea di principio lo posso fare, almeno con l'approssimazione voluta, costruendo partizioni sufficientemente "fini": è chiaro, però, che si tratta di una fatica non da poco. Sarebbe meglio riuscire a trovare un'altra strada. Così, in effetti, sarà: pur tuttavia ci troveremo in seguito a rivalutare alquanto il teorema 1 a fini pratici, anche se per scopi diversi che quello della ricerca di primitive.

Continuiamo per ora la nostra strada. Abbiamo un risultato che garantisce, sotto opportune ipotesi, l'esistenza di primitive. "Quante" ce ne sono? E' facile vedere che non c'è speranza di avere un'unica primitiva. Infatti:

<u>Osservazione 1</u> Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ , e sia $\Phi: B \longrightarrow \mathbb{R}$ una primitiva di $f$ su $B$ , con $B \subseteq A$ . E' immediato osservare che, $\forall\ c \in \mathbb{R}$ , la funzione $\Psi: B \longrightarrow \mathbb{R}$ , definita come $\Psi(x) = \Phi(x)+c$ , è anch'essa una primitiva di $f$ (basta usare il fatto che la derivata di una somma è la somma delle derivate e che una funzione costante è derivabile con derivata uguale a zero).□

Si noti che, pensando al problema dell'unicità delle primitive in termini cinematici, si sarebbe potuto immaginare subito che per l'unicità non c'era speranza: anche in un caso banale, se voglio sapere dove si trova un'auto che si muove alla velocità costante di 130 Km/h , devo anche sapere qual'era la sua posizione almeno ad un certo istante! D'altronde, non sembra che occorra informazione addizionale per sapere la posizione dell'auto. Tradotto in termini generali, verrebbe da pensare che, se fissiamo il valore di una primitiva in un certo $\bar{x} \in I$ , allora la primitiva dovrebbe essere univocamente determinata!

Possiamo provare questo risultato? Sì. Ma è molto interessante sapere <u>come</u>. In effetti, il teorema seguente è conseguenza del teorema IV.9.3. Quindi è una conseguenza del teorema fondamentale del calcolo differenziale (teorema di Lagrange). Il che penso possa apparire strano, visto che il risultato che si intende stabilire non è poi un risultato stratosferico o particolarmente sconvolgente. Rinvio a quanto già detto nelle conclusioni del capitolo IV per sottolineare che non ci sono alternative semplici percorribili.

<u>Esempio 1</u> Sia $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ così definita: $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } x < \sqrt{2} \\ 1 & \text{per } x > \sqrt{2} \end{cases}$ .

Allora $f$ è derivabile su tutto $\mathbb{Q}$ (come "funzione razionale di variabile razionale") e ha derivata nulla in ogni punto di $\mathbb{Q}$ . Però $f$ non è costante. Per curiosità, consideriamo $\hat{f} : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ , definita come $f$ (cioè: $\hat{f}(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{Q}$ ), ma avente come codominio $\mathbb{R}$ . Si noti che $\hat{f}$ , come funzione reale di variabile reale, è derivabile e ha derivata nulla su tutto $\mathbb{Q}$ : ma poiché $\mathbb{Q}$ non è un intervallo, ciò non è in contrasto con il teorema IV.9.3.□

<u>Teorema 2</u> Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $I \subseteq A$ , $I$ <u>intervallo</u>. Siano $\Phi, \Psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ , due primitive di $f$ su $I$ . Allora $\exists\ c \in \mathbb{R}$ t.c. $\Psi(x) = \Phi(x) + c$ $\forall\ x \in I$ .

<u>Dimostrazione</u> Basta osservare che $(\Psi-\Phi)'(x) = \Psi(x)-\Phi(x)$ $\forall\ x \in I$ . Vale a dire, la funzione $\Psi-\Phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ha derivata nulla su $I$ , quindi è costante. Cioè: $\exists\ c \in \mathbb{R}$ t.c. $(\Psi-\Phi)(x) = c$ $\forall\ x \in I$ . Da qui la tesi.□

Abbiamo così risolto i problemi relativi all'esistenza ed unicità di primitive per una data $f$ . Resta tuttora aperto il problema della ricerca "pratica" di primitive per una data $f$ . Per esempio, il logaritmo... Rinvio questo problema al paragrafo 10 (vedi esempio 1, in particolare, per le primitive del logaritmo).

Dedicherò, invece, l'attenzione ad un altro problema, relativo alle notazioni: finora, per indicare una primitiva di $f$ ho fatto ricorso a simboli quali $\Phi$ o $\Psi$ . Ma, visto che una $f$ ha infinite primitive, avrei bisogno di un simbolo per indicarle tutte. Per esempio, potrei indicare con $\mathcal{P}(f,B)$ l'insieme di tutte le primitive di $f:A \longrightarrow \mathbb{R}$ , essendo $B \subseteq A$ . Magari, per semplicità, potrei anche omettere $B$ nel caso frequente in cui mi interessino le primitive su tutto l'insieme di definizione di $f$ , cioè quando $B = A$ . Ovverossia, scrivere $\mathcal{P}(f)$ anziché $\mathcal{P}(f,A)$ . Si noti che il simbolo $\mathcal{P}(f,B)$ (o quello, abbreviato, $\mathcal{P}(f)$ ) indica un <u>insieme di funzioni</u>: è vero che, per lo meno nel caso in cui $B$ sia un intervallo, esse si assomigliano molto tra di loro, grazie al teorema 2 (infatti la differenza tra due qualsiasi funzioni che stanno nell'insieme $\mathcal{P}(f,B)$ è costante), ma ciò non toglie che si tratta, appunto, di un insieme di funzioni.

La notazione tradizionale usata è, invece, $\int f(x)dx$ . Di per sé non ci sarebbe niente di male ad usare questa notazione: osservo che in essa compare la variabile "muta" $x$ : come già notato nel § 2, ci sono buone ragioni per l'uso di tali variabili "mute". Per di più, il simbolo di integrale sta a ricordarci che, dopotutto, una primitiva per $f$ è data proprio dalla "funzione integrale".

Sfortunatamente, si vedono scritte usualmente cose tipo:

$$(\star) \qquad \int 3\cdot x^2 dx = x^3+c \ .$$

La scrittura di sopra presenta molteplici incongruenze. La più macroscopica è che il simbolo $x$ è usato contemporaneamente come variabile "muta" a sinistra e come vera variabile a destra. Come minimo, c'è il rischio di confusione se non si presta attenzione. Sarebbe meglio scrivere

$$\int 3\cdot t^2 dt = x^3+c \ ,$$

almeno. Ma anche in questo modo si hanno incongruenze: a sinistra c'è un insieme di funzioni, mentre a destra viene indicato il valore che una generica di queste funzioni assume in un punto $x$ . Si potrebbe rimediare scrivendo:

$$(\star) \qquad \left( \int 3\cdot t^2 dt \right)(x) = x^3+c \ .$$

Giova comunque ricordare che a sinistra vi è ancora qualcosa di sconclusionato: poiché il simbolo $\int f(x)dx$ indica un insieme di funzioni, non ha molto senso "calcolare il valore che un insieme di funzioni assume in un punto $x$ ". In effetti, l'uguaglianza $(\star)$ dovrebbe essere interpretata così: il valore che una generica primitiva assume in un punto $x$ è dato da $x^3+c$ (si sottintende la frase: "per un opportuno $c \in \mathbb{R}$ ). Se così stanno le cose, possiamo allora anche capire perché si usi (★) invece che (☆): a scapito di inesattezze formali, alleggeriamo un po' l'espressione. Basta avere le idee chiare e l'uso di (★) non dovrebbe creare problemi (al più, se uno ha dei dubbi, si ricorda che in realtà la formula giusta sarebbe (☆)).

Abbiamo messo a posto tutto? Avevo notato che la formula (☆) è una formula sconclusionata ed avevo cercato di ovviare a questo problema dandone una "interpretazione" che sembrava sensata. Così è. Vorrei però cercare di scrivere precisamente quel che abbiamo "cercato di far dire" alla formula (☆). In modo che non vi siano dubbi residui sul significato <u>preciso</u> della relazione (★) che viene comunemente usata. Ripeto, (★) può essere vista come una sorta di abbreviazione della relazione (☆). Questa, a sua volta, è una abbreviazione: la formula corretta sarebbe:

$$\forall\ \Phi \in \left( \int 3 \cdot t^2 dt \right)\ \ \exists\ c \in \mathbb{R}\ \text{ t.c. }\ (\ \forall\ x \in A\ \ (\ \phi(x) = x^3 + c\ ))\ .$$

Meglio ancora sarebbe toglierci dalla vista quel simbolo ambiguo dell'integrale indefinito. Indicando con $f$ la funzione definita come $f(s) = 3 \cdot s^2$ per ogni $s \in \mathbb{R}$ :

$$\forall\ \Phi \in \mathcal{P}(f)\ \ \exists\ c \in \mathbb{R}\ \text{ t.c. }\ (\ \forall\ x \in A\ \ (\ \phi(x) = x^3 + c\ ))\ .$$

Concluderò del tutto il discorso sulle notazioni nel § 10, facendo vedere un esempio classico: si "dimostra" facilmente che $0 = 1$ se si usa la formula (★) senza riflettere con attenzione sul suo significato.

## 9 Formula fondamentale del calcolo integrale

Ho appena finito di ribadire, all'inizio del paragrafo precedente, che l'argomento "primitive" è un argomento di calcolo differenziale. Ciò non toglie, però, che anche il calcolo integrale si sia intrufolato in modo essenziale in quel paragrafo col teorema 1[12]. Nel caso di questo teorema appena citato, abbiamo che il calcolo integrale dà una mano per la soluzione di un problema di calcolo differenziale. Vedremo ora, invece, un risultato che va nella direzione opposta: il calcolo differenziale ci dà una regoletta comoda per calcolare gli integrali definiti (orientati).

Teorema 1 (formula fondamentale del calcolo integrale) Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $I \subseteq A$, $I$ intervallo, con $f$ continua su $I$. Allora, dati $a,b \in I$, e data $\Phi: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Phi$ primitiva per $f$ su $I$, si ha:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b)-\Phi(a) \,.\square$$

Dimostrazione Osserviamo come prima cosa che l'integrale fra $a$ e $b$ certamente esiste, grazie alla continuità di $f$.

Sempre per la continuità di $f$, il teorema fondamentale del calcolo integrale mi garantisce che $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è una primitiva per $f$.

Ma allora, per il teorema 8.2, $\exists\ c \in \mathbb{R}$ t.c. $F(x) = \Phi(x)+c \quad \forall\ x \in I$. Cioè, $\exists\ c \in \mathbb{R}$ t.c. $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c \quad \forall\ x \in I$.

Ma allora $\Phi(b)-\Phi(a) = \left(\int_a^b f(t)\,dt + c\right) - \left(\int_a^a f(t)\,dt + c\right) = \int_a^b f(x)\,dx \,.\square$

Osservazione 1 Una notazione consueta per indicare $\Phi(b)-\Phi(a)$ è $\Phi(x)\Big|_a^b$ o, similmente, $\Phi(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$ .□

Esempio 1 Sia dato $\int_0^1 x\,dx$. Poiché $x^2/2$ è una primitiva di $x$, allora $\int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 1/2$. Confrontare con l'esempio 1.1 per ammirare la sensazionale semplificazione dei calcoli data dall'uso della formula fondamentale del calcolo integrale.□

---

[12] Ecco perché il paragrafo 8 si trova nel capitolo V anziché IV.

## 10 Le "regole di integrazione"

La strana commistione tra derivate e integrali che emerge grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale e alle sue conseguenze, dà come sottoprodotti alcuni teoremi di estrema utilità ai fini pratici di calcolo. Si tratta dei teoremi che vanno sotto il nome di "regole d'integrazione" per parti e per sostituzione (per integrali definiti e indefiniti).

Tanto per chiarire la situazione, osservo che le regole d'integrazione per parti e per sostituzione negli integrali indefiniti non sono altro che teoremi già noti di calcolo differenziale "letti a rovescio". Infatti, la regola di integrazione per parti è conseguenza della regola di derivazione di un prodotto e la regola di integrazione per sostituzione si ricava immediatamente dalla regola di derivazione delle funzioni composte.

Per quanto riguarda le regole di integrazione per parti e per sostituzione per integrali definiti, il loro "status" è ancora più modesto: sono semplicemente i loro omologhi "indefiniti", applicati agli integrali definiti col tramite della formula fondamentale del calcolo integrale.

Vediamo dapprima un risultato molto semplice:

Teorema 1 Siano $f,g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ , $I$ intervallo, ed $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ . Allora, se $\Phi$ e $\Psi$ sono primitive rispettivamente di $f$ e $g$ su $I$ , allora $\alpha\Phi+\beta\Psi$ è una primitiva per $\alpha f+\beta g$ su $I$ .□

Dimostrazione Ovvia conseguenza delle proprietà delle derivate: dalla derivabilità di $\Phi$ e $\Psi$ segue la derivabilità di $\alpha\Phi+\beta\Psi$ e $(\alpha\Phi+\beta\Psi)'(x) = \alpha\Phi'(x)+\beta\Psi'(x) = \alpha f(x)+\beta g(x) \quad \forall\ x \in I$ .□

Si noti che per questo teorema non serve a nulla che le funzioni siano definite su un intervallo. Avrei potuto avere $f,g: A \longrightarrow \mathbb{R}$ , con $A \subseteq \mathbb{R}$ e $\Phi,\Psi$ primitive su $B$ , con $B \subseteq A$ : allora $\alpha\Phi+\beta\Psi$ è una primitiva su $B$ ...

Passiamo ora ai due teoremi un po' più "importanti", cominciando con la regola di integrazione per sostituzione.

Teorema 2 (regola di integrazione per sostituzione) Siano $I,J \subseteq \mathbb{R}$ , $I,J$ intervalli. Siano $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g: J \longrightarrow \mathbb{R}$ , t.c. $g(J) \subseteq I$ . Supponiamo $g$ derivabile su $J$ . Si consideri la funzione composta $h: J \longrightarrow \mathbb{R}$ ( $h = f \circ g$ ). Allora, se $\Phi$ è una primitiva di $f$ su $I$ , $(\Phi \circ g)$ è una primitiva di $(\Phi \circ g) \cdot g'$ .□

Dimostrazione Osservo che $\Phi$ è derivabile (per forza, è una primitiva!) e che anche $g$ lo è. Allora posso applicare il teorema di derivazione delle funzioni composte e quindi, $\forall\ x \in J$ $(\Phi \circ g)'(x) = \Phi'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) = ((f \circ g)' \cdot g')(x)$ .□

Usando la notazione tradizionale, possiamo esprimere la tesi così:

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt = \Phi(g(t)) + c \ .$$

Ma $\Phi$ è una primitiva di $f$ . Vale a dire: $\int f(x)\,dx = \Phi(x) + c$ . Ma allora:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)_{x=g(t)} = \Phi(g(t)) + c = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt$$ [13].

Ovverossia

$$\left(\int f(x)\,dx\right)_{x=g(t)} = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt \ .$$

Teorema 3 (regola di integrazione per parti) Siano $\Phi, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ , $I$ intervallo, $\Phi$ e $g$ derivabili in $I$ . Allora, se $\Xi$ è una primitiva di $\Phi \cdot g'$ , una primitiva per $\Phi' \cdot g$ è data da $\Phi \cdot g - \Xi$ .□

Dimostrazione Osservo che $\Phi \cdot g - \Xi$ è derivabile $\forall\ x \in I$ , per le ipotesi fatte. E che $(\Phi \cdot g - \Xi)'(x) = (\Phi \cdot g)'(x) - \Xi'(x) = \Phi'(x) \cdot g(x) + \Phi(x) \cdot g'(x) - \Phi(x) \cdot g'(x) = \Phi'(x) \cdot g(x)$ .□

Osservazione 1 Naturalmente, grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale, la continuità di $g'$ ci dà una condizione sufficiente affinché $\Phi \cdot g'$ abbia primitive: infatti $\Phi \cdot g'$ risulta in tal caso continua in quanto prodotto di funzioni continue (ricordare che $\Phi$ è derivabile per ipotesi).□

Anche qui abbiamo una formulazione con la notazione tradizionale:

$$\int \Phi'(x) \cdot g(x)\,dx = \Phi(x) \cdot g(x) - \int \Phi(x) \cdot g'(x)\,dx \ .$$

Osservazione 2 E' ovvio che, quando uno deve "calcolare" un integrale indefinito, uno ha di fronte una espressione del tipo $\int h(x)\,dx$ : evidentemente sta a chi deve "calcolare" questo integrale riuscire a scrivere $h(x)$ nella forma

---

[13] Sto usando la notazione tradizionale $\int f(x)\,dx$ nell'accezione tradizionale (e fortemente ambigua! vedi § 8), cioè "valore di una generica primitiva nel punto $x$ ". Pertanto uso la notazione $\left(\int f(x)\,dx\right)_{x=g(t)}$ per indicare il valore della "generica primitiva" di $f$ nel punto $g(t)$ .

$\Phi'(x)\cdot g(x)$ . Ovverossia, scrivere $h(x) = f(x)\cdot g(x)$ , con $f$ di cui si conosca una primitiva $\Phi$ . A volte si usa anche il "trucco" di scrivere $h(x) = 1\cdot h(x)$ . Cioè $g(x) = h(x)$ e $\Phi(x) = x$ .□

<u>Esempio 1</u> Calcolare $\int \log(x)\,dx$ .□

<u>Dettaglio</u> Usiamo il trucco suggerito nell'osservazione precedente. Si ha

$$\int \log(x)\,dx = \int 1\cdot \log(x)\,dx = x\cdot \log(x)-\int x\cdot \frac{1}{x}dx = x\cdot \log(x)-x+c \text{ .□}$$

<u>Esempio 2</u> Vediamo un interessante modo di sfruttare la regola di integrazione per parti, per calcolare $\int \mathrm{sen}^2(x)\,dx$ . Si ha:

$$\int \mathrm{sen}^2(x)\,dx = \int \mathrm{sen}(x)\cdot \mathrm{sen}(x)\,dx = -\cos(x)\cdot \mathrm{sen}(x)+\int \cos^2(x)\,dx =$$
$$= -\cos(x)\cdot \mathrm{sen}(x)+\int 1-\mathrm{sen}^2(x)\,dx = -\cos(x)\cdot \mathrm{sen}(x)+x-\int \mathrm{sen}^2(x)\,dx \text{ .}$$

Cioè:

(☆) $$2\cdot \int \mathrm{sen}^2(x)\,dx = x-\cos(x)\cdot \mathrm{sen}(x)+c \text{ .}$$

Da cui

(★) $$\int \mathrm{sen}^2(x)\,dx = \frac{x-\cos(x)\cdot \mathrm{sen}(x)}{2}+c \text{ .□}$$

<u>Esercizio 1</u> Da dove esce fuori la costante $c$ che compare nella relazione (☆)? Perché non c'è $c/2$ nella successiva relazione (★)?□

<u>Esempio 3</u> Sfruttando l'idea dell'esempio precedente, calcoliamo un altro integrale.

$$\int \frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)}dx = \int \cos(x)\cdot \frac{1}{\mathrm{sen}(x)}dx =$$
$$= \mathrm{sen}(x)\cdot \frac{1}{\mathrm{sen}(x)} - \int \mathrm{sen}(x)\cdot \frac{-\cos(x)}{\mathrm{sen}^2(x)}dx = 1+\int \frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)}dx \text{ .}$$

Quindi $\int \frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)}dx = 1+\int \frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)}dx$ . Semplificando, otteniamo $0 = 1$ .

Abbiamo ottenuto una contraddizione con l'assioma 10. Pertanto l'analisi è una teoria contraddittoria (e quindi inutile). D'altronde, il famoso teorema di incompletezza di Gödel sta lì a ricordarci che non abbiamo né possiamo avere garanzie che l'analisi (e non solo essa: anche l'aritmetica) sia esente da contraddizioni. Peccato aver ottenuto questa contraddizione solo ora, che siamo praticamente alla fine: se l'avessimo saputo prima, avremmo potuto risparmiare un bel po' di fatica.□

<u>Esercizio 2</u> Trovare dove è l'errore nell'esempio 3.□

Chiudo il paragrafo con i teoremi di integrazione per parti e per sostituzione per integrali definiti orientati.

<u>Teorema 4</u> Siano $f:I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g:J \longrightarrow \mathbb{R}$, con $I$ e $J$ intervalli e t.c. $g(J) \subseteq I$. Supponiamo $g$ derivabile su $J$, con $g'$ continua su $J$, ed $f$ continua su $I$. Siano $\alpha,\beta \in J$. Allora $\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx = \int_a^b f(g(t))\cdot g'(t)dx$ .□

<u>Dimostrazione</u> Le ipotesi fatte ci garantiscono che $f$ abbia primitiva su $I$ e che possiamo applicare la formula fondamentale del calcolo integrale per il calcolo dell'integrale di $f$ da $g(\alpha)$ a $g(\beta)$. Allora $\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx =$ $= \Phi(g(\beta))-\Phi(g(\alpha))$, dove con $\Phi$ indichiamo una primitiva di $f$ su $I$.

Analogamente, le ipotesi garantiscono che $(f\circ g)\cdot g'$ abbia primitive su $J$ e che possiamo applicare la formula fondamentale del calcolo integrale per calcolare l'integrale orientato di $(f\circ g)\cdot g'$ da $\alpha$ a $\beta$. Si ha: $\int_a^b f(g(t))\cdot g'(t)dx =$ $= (\Phi\circ g)(\beta)-(\Phi\circ g)(\alpha)$. Ma $(\Phi\circ g)(\beta)-(\Phi\circ g)(\alpha)$ non è altro che $\Phi(g(\beta))-\Phi(g(\alpha))$. Pertanto il teorema è provato.□

<u>Teorema 5</u> Siano $\Phi,g:I \longrightarrow \mathbb{R}$, $I$ intervallo, $\Phi$ e $g$ derivabili in $I$ con derivata prima continua su $I$. Allora, dati $a,b \in I$, si ha:

$$\int_a^b \Phi'(x)\cdot g(x)dx = \Phi(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b \Phi(x)\cdot g'(x)dx \;.\square$$

<u>Dimostrazione</u> Conseguenza immediata del teorema 3 e della formula fondamentale del calcolo integrale.□